IV Elements propres

IV.A Questions de cours :

* Définir valeur propre, vecteur propre et élément propre.
* Donner une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité.
* Énoncer le théorème du rang

IV.B Exercices :

Exercice 1: *

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & & & & 1 & 0 \\ 0 & & & & & 1 \\ 0 & & & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de J.
2. La matrice J est-elle diagonalisable ?

Exercice 2: **

Soit J la matrice Attila.

1. Montrer que la matrice J est diagonalisable
2. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{pmatrix}$ est diagonalisable. Quelles sont ses valeurs propres ?

Exercice 3: *

1. Soit $\delta : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \quad ; \quad P \mapsto P'$ l'application de dérivation. A-t-on δ diagonalisable ?
2. On considère maintenant $\Delta : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \quad ; \quad P \mapsto P'$. A-t-on Δ diagonalisable ?

Exercice 4: **

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ où a, b, c sont trois nombres complexes.

1. Ecrire M en fonction de I_3, J et J^2 où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que J est diagonalisable, donner son spectre.
3. En déduire que M est diagonalisable, donner son spectre.

Exercice 5: **

Soit $J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, puis A^3.
2. Déterminer les valeurs propres de Aavec leur multiplicités ainsi que la dimension du sous-espace propre associé. En déduire que A est diagonalisable.

Exercice 6: ***

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable et

$$B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C}).$$

Donner les valeurs propres de B et la dimension des sous-espaces propres correspondants. À quelle condition B est-elle diagonalisable ?

Exercice 7: ***

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension fini E. On dit que u est cyclique si il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

1. Montrer que u est cyclique si et seulement si la matrice de u dans une certaine base est de la forme :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

2. Soit λ une valeur propre de C, déterminer la dimension et une base du sous-espace propre associé.
3. En déduire une CNS pour qu'un endomorphisme cyclique soit diagonalisable.